Olympiadepuzzel

Euclides 93 nummer 4

Vermenigvuldigen

Opgave

Noem M het getal bestaande uit 2017 enen achter elkaar. We maken nu een getallenrij $N_0, N_1, N_2, \ldots$ als volgt. Het eerste getal in de rij is $N_0 = 2017$. Elk volgende getal in de rij hangt af van zijn directe voorganger: N_{i+1} is de som van de cijfers van het product $N_i \cdot M$. Zo kunnen we alle getallen in de rij berekenen. Wat wordt nu de waarde van N_{2017}?

Uitwerking

Er geldt $2017 \cdot M = 2000M + 10M + 7M$. Nu is $2000M$ het getal met 2017 tweeën en daarachter drie nullen; $10M$ is het getal met 2017 enen en daarachter één nul; en $7M$ is het getal met 2017 zevens. Als we dit onder elkaar optellen dan krijgen we

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 & & & 7 & 7 & \ldots & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & + \\
\hline
2 & 2 & 4 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 8 & 8 & 7 &
\end{array}$$

De uitkomst bestaat dus uit twee keer een 2, dan een 4, dan 2013 keer een 1, en dan nog een 0, twee keer een 8 en een 7. De som van de cijfers is dus $2 \cdot 2 + 4 + 2013 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 8 + 7 = 2044$. Na één stap is dus uitkomst dus 2044. Als we nog een stap uitvoeren, krijgen we op dezelfde manier

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 4 & 4 & 4 & \ldots & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & \\
 & & & 4 & 4 & \ldots & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & + \\
\hline
2 & 2 & 7 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 8 & 8 & 4 &
\end{array}$$

De som van de cijfers van deze uitkomst is $2 \cdot 2 + 7 + 2013 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 8 + 4 = 2044$. We zien dat er na nog een stap weer 2044 uitkomt. Hoe vaak we ook nog stappen toepassen, steeds zal de uitkomst 2044 zijn, omdat we steeds ook weer met 2044 de berekening beginnen. Na 2017 stappen is de uitkomst dus 2044.

Inzenders met een juiste uitwerking

Harm Bakker, Frans van Hoeve, 6vwo-leerlingen (wiskunde D) Hans Linders, Jan Meerhof, Carla Molenaar, leerlingen Chantal Neijenhuis, Tessa Sprunken, Kees Vugs en Monica Woldinga.

Winnaar van de kadobon

Jan Meerhof.